ubimuseum

REVISTA ONLINE
DO MUSEU DE LANIFÍCIOS
DA UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR

Matemática e Arte

MANUEL JOAQUIM SARAIVA
DM, Universidade da Beira Interior
manuels@ubi.pt

ANA MADALENA TEIXEIRA
ESQ Palmeiras, Covilhã
anambt@gmail.com

RESUMO

Neste artigo, começa-se por fazer uma apresentação da faceta da Matemática com forte ligação à Arte, sustentada pela perspetiva dos matemáticos. Apresenta-se, depois, uma faceta da Arte, também com forte ligação à Matemática, suportada pela perspetiva dos artistas. Conclui-se o artigo com a defesa de que existe uma conexão entre Arte e Matemática. Quer a investigação matemática, quer a criação artística podem ser vistas como duas faces da mesma moeda. A razão para essa interdependência é o prazer estético.

PALAVRAS-CHAVE

Arte, Matemática, Prazer estético.

ABSTRACT

In this article, we start by presenting the facet of Mathematics with a strong connection to Art, supported by the perspective of mathematicians. Then there is a facet of Art, also with a strong connection to Mathematics, supported by the artists' perspective. The article concludes with the assertion that there is a connection between Art and Mathematics. Both mathematical research and artistic creation can be seen as two sides of the same coin. The reason for this interdependence is the aesthetic pleasure.

KEYWORDS

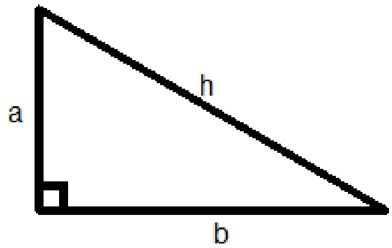
Art, Mathematics, Aesthetic pleasure.

INTRODUÇÃO

Este artigo resulta da conferência realizada pelos autores no Museu dos Lanifícios, UBI, em 13 de novembro de 2014. O interesse suscitado na data pelos presentes na sessão relativamente ao conteúdo da comunicação realizada, bem como a solicitação do Diretor do Museu, Prof. António dos Santos Pereira, levaram os autores à passagem a escrito das ideias fundamentais então apresentadas. Neste artigo, faz-se uma apresentação da faceta da Matemática com forte ligação à Arte, sustentada pela perspetiva dos matemáticos. Apresenta-se, depois, uma faceta da Arte, também com forte ligação à Matemática, suportada pela perspetiva dos artistas. Conclui-se o artigo com a defesa de que existe uma conexão entre Arte e Matemática. Quer a investigação matemática, quer a criação artística podem ser vistas como duas faces da mesma moeda. A razão para essa interdependência é o prazer estético.

BELOS TEOREMAS

Antes de confirmar o que é um teorema em Matemática, deixamos o que se entende por axioma. Este é uma hipótese inicial da qual outros enunciados são logicamente derivados. Pode ser uma proposição, um enunciado ou uma regra que permite a construção de um sistema formal. De forma diferente à dos teoremas, os axiomas não podem ser derivados por princípios de dedução e nem são demonstráveis por derivações formais, simplesmente porque eles são hipóteses iniciais. Em muitos contextos, "axioma" e "postulado" são usados como sinónimos. Um axioma não é necessariamente uma verdade autoevidente, mas apenas uma expressão lógico-formal usada numa dedução, visando obter resultados mais facilmente. Por seu turno, um *teorema* é uma afirmação que pode ser demonstrada, provada de maneira lógica a partir de um axioma ou de outros teoremas que tenham sido previamente demonstrados. Este processo de demonstração processa-se através de determinadas regras de inferência. Embora o termo e o conceito de teorema sejam originários do Grego Antigo, hoje aceita-se a ideia de *teorema* como a de uma certa afirmação que pode ser provada e que assume uma grande importância para a Matemática. Porém, enquanto uma afirmação matemática não for demonstrada, ela não passa de uma conjetura, levando a que o trabalho de enunciar e demonstrar teoremas seja uma atividade muito importante para um matemático. As ideias matemáticas, tal como as cores ou as palavras, devem encaixar de um modo harmonioso. A beleza é o primeiro teste: não existe lugar permanente no mundo para matemática feia. É neste sentido que o Teorema de Pitágoras (ver figura 1) é um dos mais belos e importantes teoremas da Matemática de todos os tempos – seja pela simplicidade e aplicabilidade, seja pela posição que ocupa na história do conhecimento matemático.



$a^2 + b^2 = h^2$

Fig. 1 – Teorema de Pitágoras

Desde o século V a.C., surgiram inúmeras demonstrações deste teorema. Em 1940, o matemático americano E. S. Loomis publicou o livro *The Pythagorean Proposition* (segunda edição), com 370 demonstrações. Destas, apresentamos três que, para nós, são muito elegantes.

PROVA DE EUCLIDES

Fig. 2 – Prova de Euclides

PROVA ADAPTADA DE CHOU PEI MAN CHING
(200 ANOS A. C.)

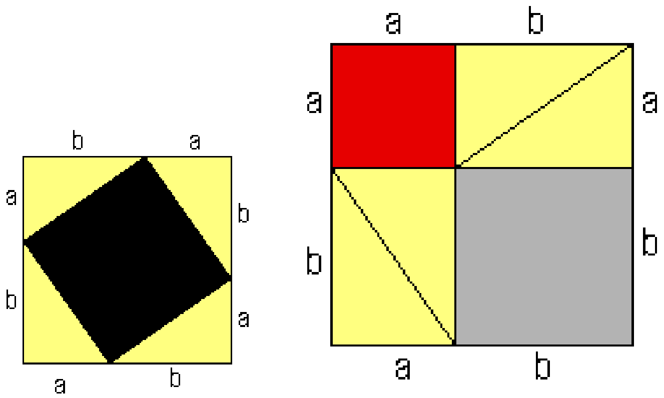


Fig. 3 – Prova adaptada de Chou pei man Ching

PROVA USANDO O TANGRAN CHINÊS

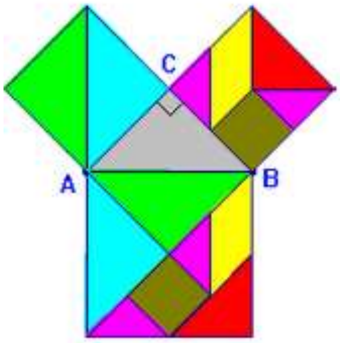


Fig. 4 – Prova usando o Tangran Chinês

Em todas estas demonstrações, as ideias matemáticas encaixam de um modo harmonioso, apresentando uma beleza única. Um outro teorema que aqui destacamos, inventado mais recentemente, é o Teorema Fundamental do Cálculo (figura 5).

Se f é uma função contínua em $[a,b]$, e F é uma primitiva de f em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

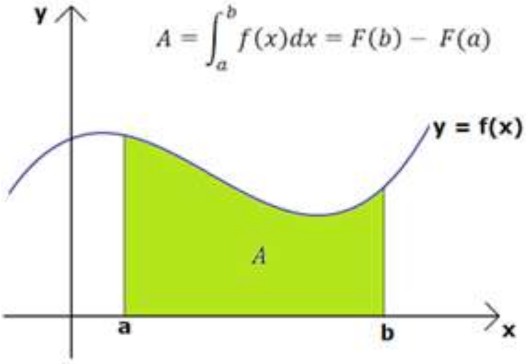


Fig. 5 – Teorema Fundamental do Cálculo

Este teorema transforma a difícil tarefa de calcular integrais definidas por meio de cálculo de limites de somas num problema muito mais fácil de primitivação. Não temos que calcular somatórios construídos a partir da subdivisão do intervalo; simplesmente determinamos uma primitiva usando as técnicas de primitivação estudadas anteriormente. Trata-se de um teorema que simplifica fortemente o conhecimento existente na época da sua invenção, usando de forma muito harmoniosa e criativa o conhecimento já existente. Com ele podemos calcular áreas "difíceis", por exemplo, tal como se evidencia na figura 3:

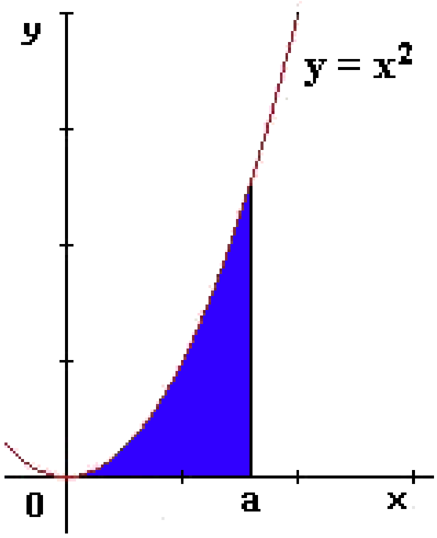


Fig. 6 – Cálculo da área "difícil" a sombreado: $\int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$

RESOLUÇÕES ELEGANTES DE PROBLEMAS

Muita da beleza da Matemática encontra-se nas demonstrações dos teoremas e nas resoluções dos problemas que são realizadas. Nelas, a criatividade e a harmonia sobressaem, sobrepondo-se aos aspetos lógicos, considerados mais "frios" e mais "mecânicos", e conferindo-lhes a vertente do belo de forma muito clara. Como exemplo, apresentamos a resolução de um problema colocado por Victor Vasarely (1906-1997), pintor húngaro-francês e um dos fundadores da **op art**, que se baseia em figuras e transformações geométricas. Num dos seus quadros, unem-se dois vértices de um quadrado com os pontos médios dos lados opostos, dando origem a um losango central (ver figura 7). O problema é: ***Que relação há entre as áreas do losango e do quadrado inicial?***

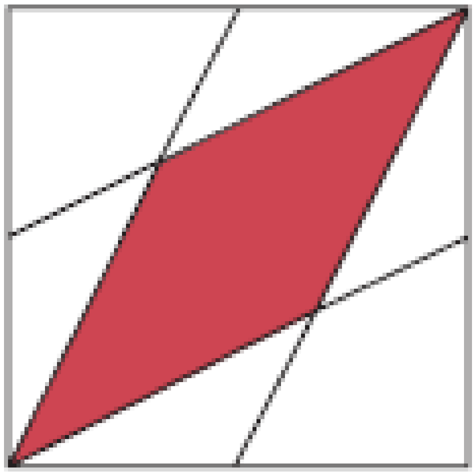


Fig. 7 – O problema de Vasarelly

Claro que uma mente matematizada exige a justificação de que o quadrilátero a sombreado é um losango. Satisfeita esta exigência – trata-se, de facto, de um losango, pois os lados são todos iguais –, há que tentar responder à questão colocada. Para tal, apresentamos aqui dois caminhos diferentes, de entre os muitos possíveis. Ambos nos conduzem a um resultado que responde à questão colocada, porém, o segundo deles, e para os autores deste texto consegue evidenciar uma harmonia de ideias matemáticas mais bem conseguida, conferindo-lhe uma maior beleza. É este segundo caminho que será usado por nós para responder à questão colocada.

O PRIMEIRO CAMINHO

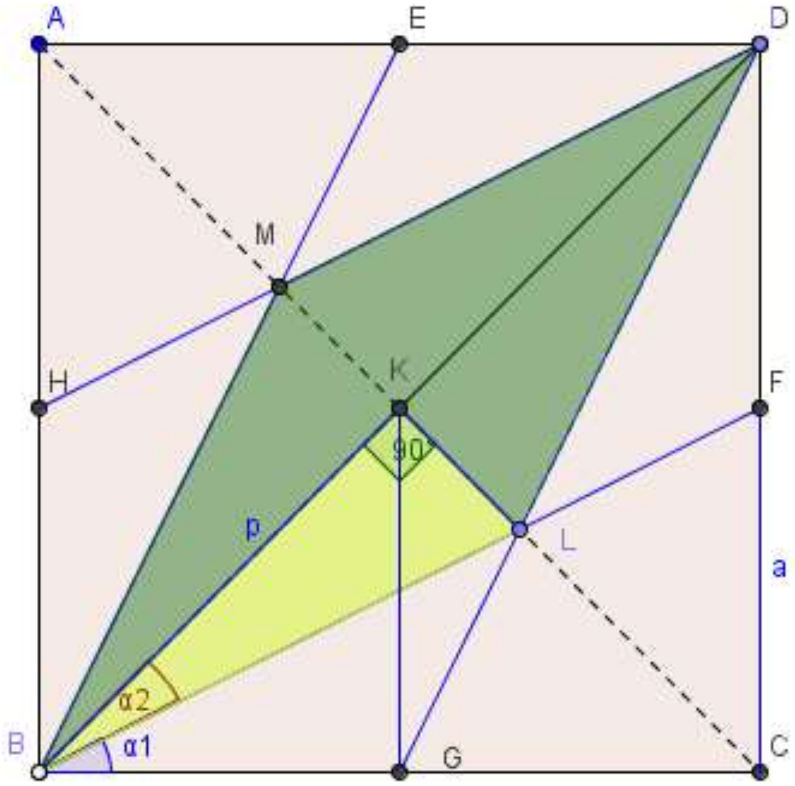


Fig. 8 – O primeiro caminho

A imaginação, o conhecimento matemático e a criatividade do autor desta resolução levam à construção da figura 8, a partir da qual, e colocando em jogo conceitos geométricos (área de um triângulo; teorema de Pitágoras) e trigonométricos (tangente de um ângulo; tangente da soma de dois ângulos), deduziu que a área do losango era um terço da área do quadrado. É uma resolução que exige alguns cálculos, tornando-se, eventualmente, algo aborrecida e pouco simpática.

O SEGUNDO CAMINHO

Após o recurso a um software de geometria dinâmica, o autor desta resolução começa por ganhar convicções quanto à relação entre as áreas em causa (a do losango é um terço da do quadrado). Seguidamente imaginou, de acordo com o seu conhecimento matemático e com a sua criatividade e sensibilidade, a figura 9:

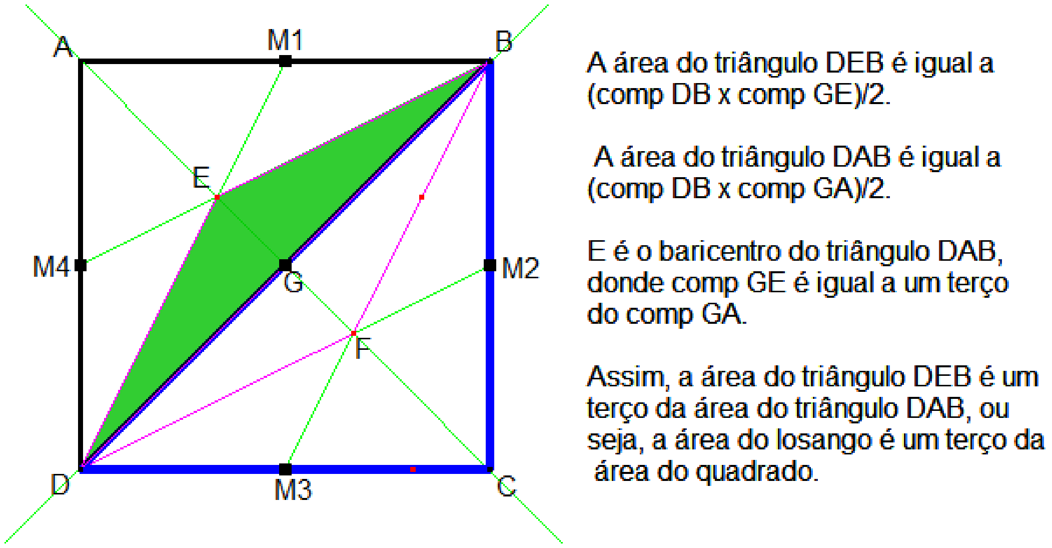


Fig. 9 – O segundo caminho

Nesta resolução, o autor faz uso do conhecimento da área de um triângulo e da existência do ponto baricentro, e suas propriedades. A enorme harmonia, e para os autores deste texto, está na simplicidade da resolução, nomeadamente no recurso a poucos conhecimentos matemáticos e à sua suficiência para dar uma resposta ao problema colocado. Pouca, mas muita, Matemática. “Quase” que basta olhar para a figura para se conseguir dar uma resposta à questão colocada. Isto é belo.

A PERSPETIVA DOS MATEMÁTICOS

Muitos matemáticos têm falado e escrito sobre o belo na Matemática, onde *Beleza* e *Estética* são as duas palavras em que eles acreditam piamente. Para Emmer (2005: 64):

> O matemático tem uma vasta variedade de campos em relação aos quais pode regressar e goza uma considerável liberdade naquilo que ele faz com eles... é correto afirmar que os seus critérios de seleção, e também os de sucesso, são principalmente estéticos. Entendo que esta afirmação é controversa e que é impossível "prová-la", ou, mesmo, dar-lhe substância. Espera-se que um teorema matemático, ou uma teoria matemática não só descrevam e classifiquem numerosos e diversos casos especiais, numa forma simples e elegante, mas também que alimentem a expectativa da apresentação de elegância na sua maquilhagem estrutural. Esses critérios são claramente os de qualquer arte criativa … muito mais semelhantes à atmosfera da arte pura e simples do que à das ciências empíricas.

Há, desta forma, uma associação clara da atividade matemática à atividade da arte pura. Por sua vez, Jacques Mandelbrot (1995: 29-38) afirma que:

> A intuição inicial de um matemático ou de um artista é livre, livre da pressão da realidade que pesa sobre a ciência experimental. A Matemática, além da sua evolução sobre as relações com a Física, evolui de acordo com a sua própria lógica e não está de forma alguma ligada à realidade. Um matemático faz Matemática por introspeção, tal como um artista... um facto matemático para ser interessante tem de ser, em primeiro lugar, belo. Um teorema matemático pode e deve ser tão belo como um poema, pois é isso que alimenta o espírito.

Mandelbrot diz-nos que a beleza é um critério importante na prática de um matemático. Refere-se ao teorema matemático como algo belo como um poema, pois é assim que se alimenta o espírito humano. Relativamente a este aspeto, e relatando a sua própria experiência na demonstração do último Teorema de Fermat, Andrew Wiles afirma (Sing, S. 1999: 40-43). "L´ultimo teorema di Fermat: il raconto di scienza del decennio", in M. Emmer, Matemática e cultura 2. Milan: Springer Italia):

> Após o muito trabalho já desenvolvido em torno desta demonstração, de repente, e de forma não esperada, tive a revelação desejada, que se veio manifestar como uma solução para a demonstração e que, para mim, era tão indescritivelmente ***bela***, ***simples*** e ***elegante***. Não conseguia entender como é que a não tinha alcançado antes, tendo ficado a olhar fixamente para ela durante vinte minutos, como se ainda não acreditasse na sua existência. Depois, durante o dia, vagueei pelo departamento e continuei a ir à secretária para ver se a solução ainda lá estava. Ela ainda lá estava. Não me podia conter, estava tão excitado. Foi o momento mais importante da minha vida de trabalho. Nada que faça no futuro significará tanto para mim.

Wiles testemunha o surgimento inesperado de uma ideia, e faz uma alusão explícita à beleza, simplicidade e elegância da demonstração matemática. Ainda sobre a atividade e a prática matemática, o matemático Hardy (1940) afirma que o sentimento de Arte torna-se ainda maior quando uma pessoa pensa sobre a forma como trabalha e progride um investigador. Para aquele autor, não devemos imaginar um matemático a operar inteiramente de forma lógica e sistemática. Ele muitas vezes tateia no escuro, não sabendo se deverá tentar provar, ou não, uma certa proposição e, frequentemente, ocorrem-lhe ideias essenciais inesperadas, sem ele mesmo ver um caminho lógico e claro que o conduza a elas a partir das considerações anteriores. Segundo Hardy, e tal como acontece com os compositores e artistas, na construção dos novos constructos matemáticos deveremos falar de inspiração. Segundo um dos maiores nomes da Matemática do século passado, Poincaré (1905: 139), a Matemática assume-se como um *instrumento* para *estudar a Natureza*, tem uma meta filosófica e, ainda, uma *meta estética*. Para ele,

> Os matemáticos experienciam uma satisfação parecida com a sentida pelos pintores ou músicos. Eles admiram a *harmonia delicada dos números e das formas*; eles maravilham-se quando uma nova descoberta revela perspetivas inesperadas.

Poincaré afirma, mesmo, que a satisfação que os matemáticos experienciam com o que fazem tem a ver com o lado estético da Matemática. Conclui a sua ideia sobre o assunto, questionando que embora não sejam muitos os afortunados que são convidados a satisfazer-se plenamente com, na e pela Matemática, não será isso também o que acontece com a maioria das artes nobres? Terminamos esta secção com uma referência a François Le Lionnais (1962: 457-458). Para este matemático:

> A beleza mostra-se ela própria na Matemática, tal como nas outras ciências, nas Artes, na vida e na Natureza. As emoções que a Matemática envolve, muitas vezes comparável às da música pura, grande pintura ou poesia, não são de um tipo diferente, sendo difícil compreendê-las se não se experienciou o mesmo lampejo da iluminação. A beleza da Matemática certamente não implica a sua verdade ou a sua utilidade. Para algumas pessoas ela produz horas de prazer incomparável, para outras pessoas há a certeza de que a Matemática continuará a ser usada para o benefício de cada um e para a glória da aventura humana.

Le Lionnais distingue claramente a estética da Matemática da aplicação da Matemática à estética, realçando a beleza da Matemática, por si mesma. Outros testemunhos de matemáticos poderiam ser referidos por nós. Pensamos, porém, que todos aqueles que aqui trouxemos revelam fatores comuns e muito concordantes sobre a forma como aqueles matemáticos veem a natureza da Matemática, a prática matemática e a relação que estabelecem da Matemática com as Artes, nomeadamente com a beleza, a simplicidade e a estética.

ARTE E MATEMÁTICA

Nesta secção abordaremos, à semelhança do que foi feito na secção anterior, alguns exemplos de Arte e apresentaremos a perspetiva de vários artistas. Começaremos por apresentar alguns dos trabalhos de Almada Negreiros. A figura 10 é a representação de um autorretrato do artista, um desenho de 1949, feito a tinta-da-China:

Fig. 10 – Autorretrato de Almada Negreiros (1949)

Neste autorretrato observa-se claramente a "invasão" matemática, proliferando as figuras geométricas e as relações entre elas, dispostas e utilizadas com um sentido estético muito profundo. Posteriormente, em 2014, foi construído em Lisboa um monumento que dá corpo ao autorretrato (figura 11):

Fig. 11 – Reminiscência de Almada Negreiros (2014)

Almada construiu uma série composta por quatro quadros abstrato-geométricos de iguais dimensões, pertencentes ao acervo do Centro de Arte Moderna da Fundação Calouste Gulbenkian, que constituem, teoricamente, uma unidade numérica, a saber: i) Porta da Harmonia; ii) O Ponto de Bauhütte; Quadrante I; e Relação 9/10. Como exemplo, apresentamos a Porta da Harmonia (1957):

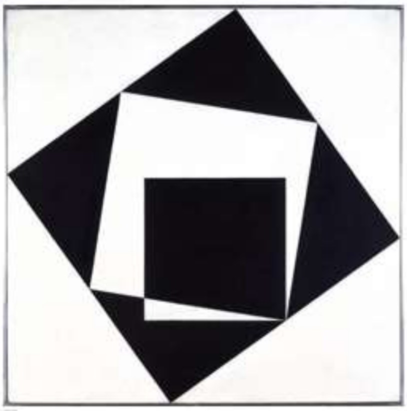


Fig. 12 – Porta da Harmonia (1957)

Segundo Sophia de Mello Breyner Andersen (1958: 4):

> *Estes quadros são a pura síntese, a lei da proporção e da harmonia, que está latente em todas as coisas que estão certas. E por isso deles nasce uma tão funda sensação de equilíbrio, de clarificação, de serenidade. Evocam imediatamente a Grécia. Sendo uma das obras mais modernas da exposição, é aquela que está mais ligada à arte da Antiguidade.*

É a Arte eivada da lei da proporção matemática e de harmonia, realçando equilíbrio e serenidade. No campo da Arquitetura, começamos por apresentar a Mesquita de Kairouan (Tunísia, ano 670 D.C.).

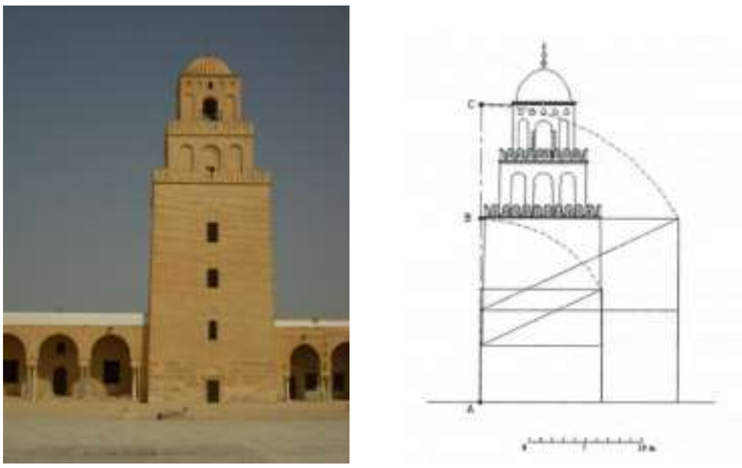
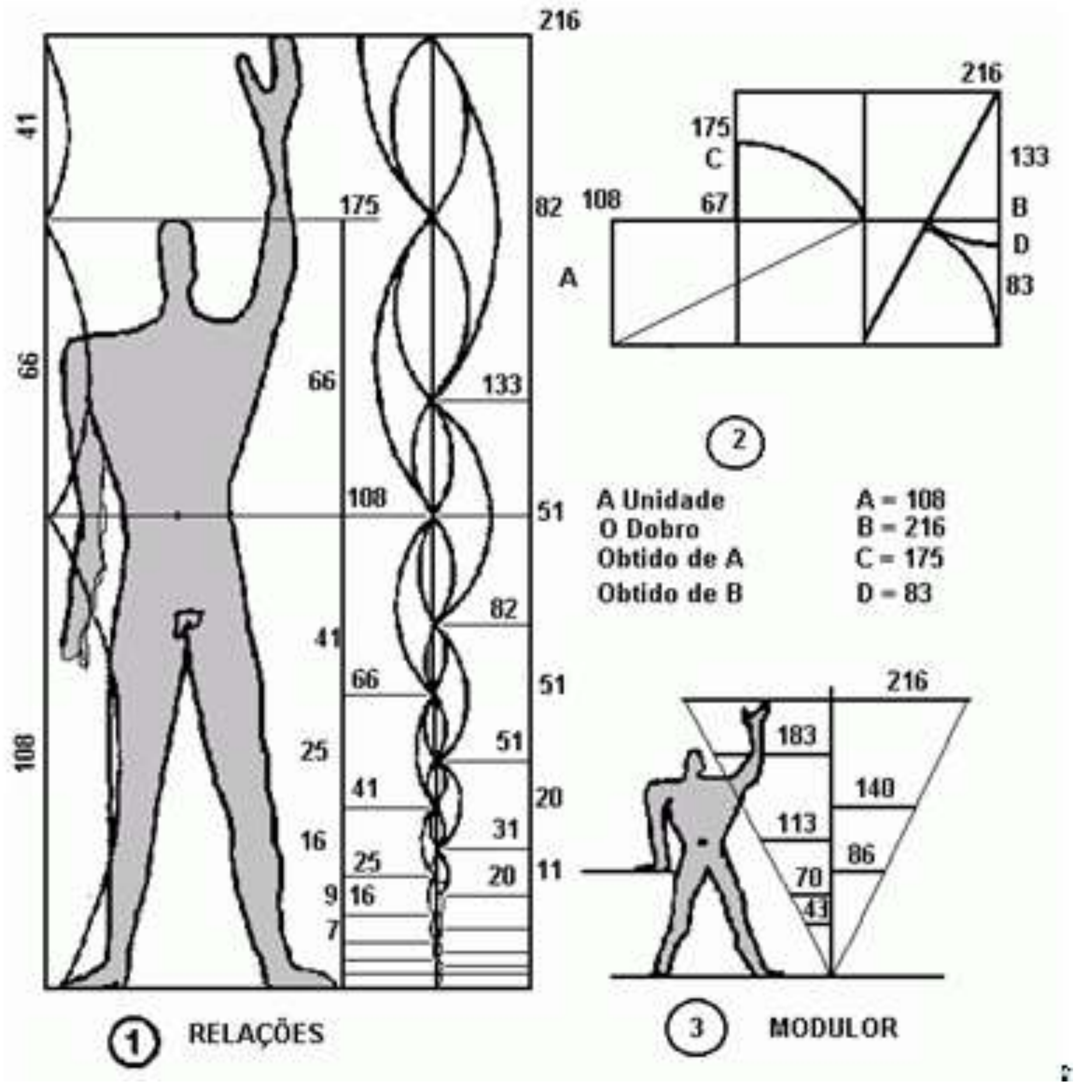


Fig. 13 – Mesquita de Kairouan (Tunísia, ano 670 D.C.)

A sua construção mostra a importância da Matemática na sua conceção, para além dos necessários cálculos. De facto, e segundo alguns estudiosos, a altura do minarete é determinada pela construção geométrica da secção dourada.

Le Corbusier – arquiteto francês – criou o *Modulor* (ver figura 14), entre 1943 e 1950. Este trabalho consiste num sistema de medidas assente nas dimensões do corpo humano e na Matemática. Trata-se de uma fórmula realizada com base no "quadrado duplo", na "sucessão de Fibonacci" e no "retângulo de ouro", a partir da qual seria possível gerar duas sequências de medidas em harmonia com o corpo humano e entre si. Estas sequências poriam em relação dois sistemas métricos –o anglo-saxónico e o decimal- e a sua aplicação permitiria unir o mundo da construção, dividido em duas partes: a dos metros e centímetros e a dos pés-polegadas.



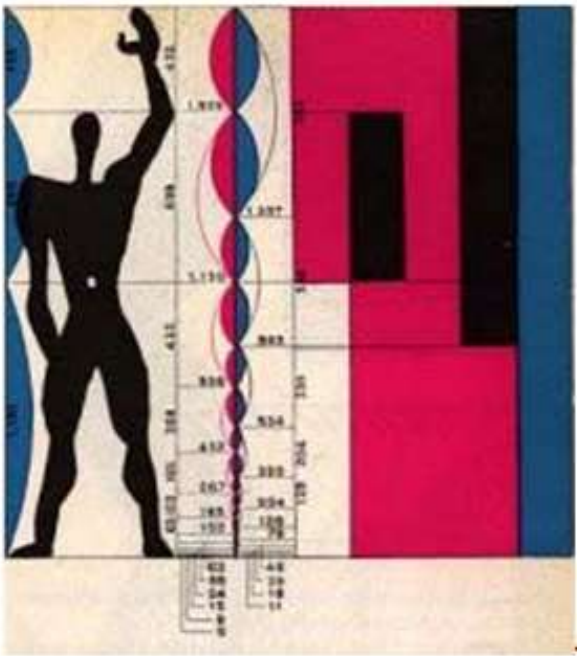


Fig. 14 – O *Modulor*

Segundo Emmer (2013), Le Corbusier tinha um sonho que era o de construir um modelo que apresentasse uma sequência infinita de diferentes combinações e proporções, onde as várias obras realizadas, embora diferentes entre si, estivessem unificadas pela harmonia e onde houvesse uma conciliação entre a dimensão humana e a dimensão matemática. Mais recentemente, o famoso arquiteto Norman Foster, aquando da inauguração da sua obra Viaduto de Milau (ver figura 15), afirma estar muito satisfeito, pois aquela sua última criação contém o famoso número áureo.

Fig. 15 – O viaduto de Millau, 2004

Na Pintura, recordamos Leonardo da Vinci e a sua célebre Mona Lisa (ver figura 16). Nela se observa o papel desempenhado pela Matemática, em especial a espiral dourada, evidenciando a manifestação de um movimento contínuo e belo.

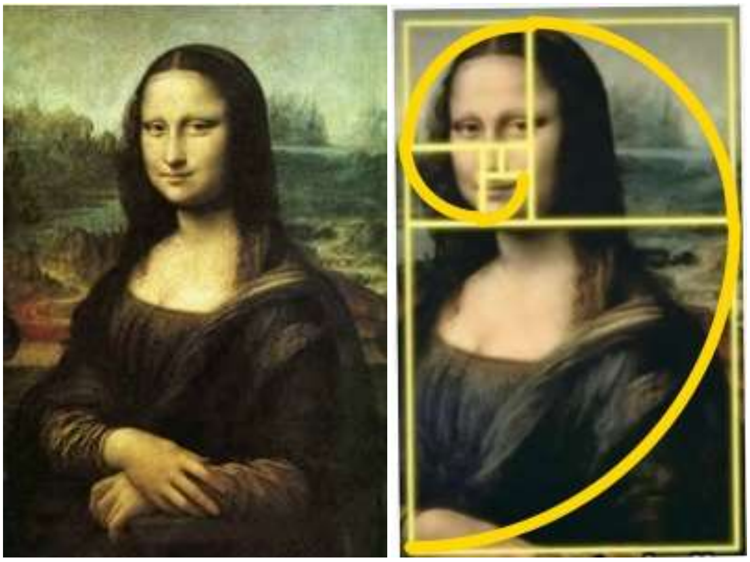


Fig. 16 – Mona Lisa (1503 – 1506)

Fechamos esta secção com uma referência às Letras. Segundo Vasco Graça Moura (1994), Jorge de Sena aplica o número de ouro à totalidade dos versos (8816) de Os Lusíadas, apresentando o seguinte esquema:

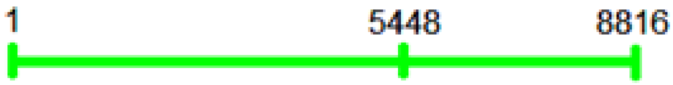


Fig. 17 – Aplicação do número de ouro à totalidade dos versos de Os Lusíadas

O número 5448 obtém-se pela divisão de 8816 pelo número de ouro. Ora o verso 5448, "*Fim de suas perfias tão constantes*", e segundo Graça Moura (1994:148), é realçado por Jorge de Sena na medida em que é ele que "Dá a chegada de Vasco da Gama à India". Seja na Arquitetura, seja na Pintura, seja nas Letras, a Arte incorpora e inspira-se, em muitos casos, na Matemática, apresentando-a nas suas mais diversas vertentes e misturas, permitindo realçar harmonia e beleza.

A PERSPETIVA DOS ARTISTAS

O pintor, escultor, arquiteto e desenhador gráfico suíço Max Bill (1908 – 1994) foi um dos *designers* mais influentes do século XX. Para ele, e segundo Emmer (2013: 4):

> A Matemática não é apenas um dos instrumentos essenciais do pensamento primário, mas, igualmente, nos seus elementos fundamentais, uma ciência das proporções, do comportamento objeto a objeto, movimento a movimento. E dado que esta ciência tem em si estes elementos fundamentais e os coloca em relação significativa, é natural que factos semelhantes possam ser representados, transformados em imagens

Max Bill, e na sua conceção de uma abordagem matemática à arte, afirma, segundo Emmer (2005: 73):

> Por uma abordagem matemática à arte não é preciso dizer que não me refiro a ideias fantasiosas para transformar a arte por algum sistema engenhoso de cálculo rápido com a ajuda de fórmulas matemáticas. No que se refere à composição, pode dizer-se que toda a escola antiga de arte teve uma base mais ou menos matemática. Há também tendências do homem na arte moderna que se baseiam no mesmo tipo de cálculos. Estes, juntamente com as próprias escalas de valor do artista, são apenas parte dos princípios elementares comuns do design para estabelecer a relação apropriada entre os volumes dos componentes. Isto é, para transmitir harmonia ao todo.

Para Max Bill, a Matemática não é quem determina a harmonia ao todo. Esta existe apenas com a junção daquela com as próprias escalas de valor do artista. Há, assim, um reconhecimento da importância da Matemática no trabalho do artista, bem como na contribuição para a harmonia do todo. M. C. Escher (1898 – 1972), artista gráfico holandês, e um dos mais célebres e conhecidos artistas gráficos modernos, tem uma vasta obra onde se incluem litografias, xilogravuras, entalhes em madeira e «mezzotinto». Trabalhou com formas geométricas inspiradas em modelos islâmicos e em formações cristalinas. Procurou dar vida a esses padrões, substituindo as formas abstratas por figuras reconhecíveis (animais, plantas, pessoas). Escher, mais do que um artista que ilustra algumas ideias matemáticas, é um artista que usa as ideias matemáticas para construir e elaborar o seu próprio espaço geométrico. Para Escher (1961: 8), o texto das publicações científicas estava geralmente para lá da sua compreensão, porém, os desenhos que as ilustram serviram-lhe frequentemente para perceber novas possibilidades para o seu trabalho. Deste modo, um contacto profundo pôde ser estabelecido entre os matemáticos e ele próprio. De forma curiosa, ou não, aquele artista afirma:

> Confrontando os enigmas que nos rodeiam e considerando e analisando as observações que fazia, terminei nos territórios da Matemática. Apesar de não possuir qualquer conhecimento ou treino nas ciências exatas, sinto muitas vezes

> que tenho mais em comum com os matemáticos do que com os meus colegas artistas.

Tal como Max Bill, Escher defende a ideia de que a Matemática fornece ideias para a sua atividade, mas o artista não se limita a usá-las no seu trabalho. Ele, com tais ideias matemáticas, cria o seu próprio espaço. As palavras de Escher levam-nos a questionar o porquê deste seu sentimento de proximidade com os matemáticos. Após o seu reconhecimento de não possuir conhecimentos matemáticos, o que leva Escher a identificar-se tanto com eles? Tudo indica que isso acontece pela importância, utilidade e magia que aquele artista vê na Matemática. Ele “dá vida” às ideias matemáticas através das suas figuras, evidenciando a sua beleza e estética. Por sua vez, as próprias ideias matemáticas são um suporte para dar azo à sua imaginação, o que lhe permite alargar o seu horizonte de trabalho, criando o seu próprio espaço.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste texto, procurámos evidenciar que quer a investigação matemática, quer a criação artística podem ser vistas como duas faces da mesma moeda. Para nós, a razão para essa interdependência é o prazer estético. Segundo Michele Emmer (2005), a relação entre a Matemática e a Arte, e entre a Matemática e a Estética, tem uma história longa e interessante. O seu afrouxamento pontual deve-se ao facto de algumas pessoas que trabalham a Arte, a Estética e as disciplinas humanísticas, não conhecerem muito do desenvolvimento recente da Matemática. Para aquele autor, há uma ambição artística na comunidade matemática, e há a necessidade para que a criatividade artística dos matemáticos seja reconhecida pelas outras comunidades.

A Matemática, ao ser um atividade humana, criada e desenvolvida pelo ser humano, que, pela sua própria natureza, procura o belo, não podia estar desligada do prazer estético.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andresen, Sophia de Mello Breyner (1958). Modernidade e tradição na exposição Gulbenkian. Diário Popular, 09 de Janeiro de 1958, p. 4 e 6.

Bill, M. (1949). Die mathematische Denkweise in der Kunst unserer Zeit, Wrek, nº 3. Reeditado em inglês, com correções feitas pelo próprio autor, em M. Emmer, ed., The Visual Mind. Cambridge: MIT Press (1993), pp. 5- 9.

Emmer, M. (2005). *The visual mind II*. Cambridge, The MIT Press

Emmer, M. (2013). Matemática e Cultura. *Revista Educação e Matemática*, pp. 3-11. Lisboa: APM.

Escher, M. C. (1961). *The Graphic Work of M. C. Escher*. Macdonald and Co, London.

Freitas, L. (1990). *Almada e o número*. Editora Soctip, Lisboa.

Hardy, G. (1940). *A Mathematicians's Apology*. New York: Cambridge University Press.

Le Corbusier (1949). Le Modulor. Essai sur une misure harmonique à l' échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique. Éditions de l'Architecture d'Aujourd'hui, coll. Ascoral. Le Lionnais, F. (1962). *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris: Librairie Scientifique et Techinque A. Blanchard.
Loomis, E. S. (1940). *The Pythagorean Proposition*.

Mandelbrot, J. (1995). "Spontanément mathématique", in M. Loi, ed., *Mathématiques at art*. Paris: Herman, 29-38.

Moura, V. G. (1994). *Camões e a divina proporção*. Imprensa Nacional, Casa da Moeda, Lisboa.

Poincaré, H. (1905). *La valeur de le science*. Paris: Flammarion.

Sing, S. (1999). "L´ultimo teorema di Fermat: il raconto di scienza del decennio", in M. Emmer, *Matemática e cultura 2*. Milan: Springer Italia, pp. 40-43.

von Neumann, John (1956). "The mathematician". In *The World of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, pp. 2053 – 2063.

MATEMÁTICA E ARTE: FONTES DAS ILUSTRAÇÕES

Número e legenda da figura (página)	Fonte respetiva
Fig. 1 – Teorema de Pitágoras	Pública (elaborada por nós)
Fig. 2 – Prova de Euclides	Livro *The Pythagorean Proposition* (segunda edição), referenciado por nós.
Fig. 3 – Prova adaptada	Livro *The Pythagorean Proposition* (segunda edição) , referenciado por nós.
Fig. 4 – Prova usando o Tangran Chinês	Livro *The Pythagorean Proposition* (segunda edição) , referenciado por nós.
Fig. 5 – Teorema fundamental do cálculo	Pública
Fig. 6 – Cálculo da área "difícil" a sombreado	Pública
Fig. 7 – O problema de Vasarelly	Revista Educação e Matemática, nº 125, p. 60, referenciada por nós (a composição da fig. 7 é da nossa responsabilidade)
Fig. 8 – O primeiro caminho	Resolução conjunta – alunos e professor – saída de uma aula de Complementos de Didática da Matemática, 3º ciclo em Didática da Matemática, UBI, 2013. Pode ser considerada pública.
Fig. 9 – O segundo caminho	É da nossa responsabilidade. Pública
Fig. 10 – Autorretrato de Almada Negreiros (1949)	Livro "Almada e o número", p. 20, referenciado por nós.
Fig. 11 – Reminiscência de Almada Negreiros (2014)	Fotografia do monumento. É uma figura pública.
Fig. 12 – Porta da Harmonia (1957)	Livro "Almada e o número", p. 57, referenciado por nós.
Fig. 13 – Mesquita de Kairouan (Tunísia, ano 670 D. C.)	Composição de uma fotografia tirada por uma das autoras do artigo (Ana Teixeira) e pela figura 7, p. 15, da revista NEXUS NETWORK JOURNAL, VOL. 6, Nº 1, 2014. (não referenciada por nós)
Fig. 14 – O modulor	Imagem http://staff.bath.ac.uk [figura de cima] Imagem http://www.educ.fc.ul.pt [figura de baixo]
Fig. 15 – O viaduto de Millau, 2004	https://pt.wikipedia.org/wiki/Viaduto_de_Millau [a figura da direita] A imagem da esquerda foi tirada da NET, mas não conseguimos lembrar-nos de onde. Na NET há milhares de fotografias do viaduto de Millau!
Fig. 16 – Mona Lisa (1503 – 1506)	É a composição de duas Mona Lisas, feita por nós. É pública.
Fig. 17 – Aplicação do número de ouro à totalidade dos versos de Os Lusíadas	Construída por nós, baseada na informação da p. 147 do livro "Camões e a divina proporção", referenciado por nós. É pública.